Okólnik Obserwatorjum Krakowskiego. — Circulaire de l'Observatoire de Cracovie.
N° 22.

Über die Anwendbarkeit der Gyldén-Brendel'schen Störungstheorie auf die jupiternahen Planetoiden nebst kritischen Betrachtungen betr. der Arbeit J. Krassowski's über den Thuletypus

von
T. Banachiewicz.

ZUSAMMENFASSUNG. — Anlässlich einer Arbeit von *J. Krassowski,* welcher die von *H. Buchholz* für den Hildatypus abgeleiteten Formeln ohne weiteres für den Thuletypus benutzt, untersucht Verf., ob die Formeln der *Gyldén-Brendel*'schen Störungstheorie auf die jupiternahen Planetoiden überhaupt angewandt werden können. Nach kurzer Schilderung (§ 1) der spezifischen Schwierigkeiten einer Theorie von Thule wird zunächst gezeigt (§ 2), dass die *Gyldén-Brendel*'schen Entwicklungen für die jupiternahen Planetoiden nur scheinbar nach den Potenzen der kleinen Exzentrizitäten η und η' fortschreiten; in der Wirklichkeit hat man in der Nähe von Jupiter mit den Entwicklungen nach Potenzen der Exzentrizitäten, dividiert durch die kleine Grösse $1-\alpha$, zu tun. Eine Abbrechung der Reihen bei den zweiten Potenzen muss die Störungen, wo sie am stärksten sind, mit grossen Fehlern behaftet ergeben. Numerisches Beispiel (§ 3) bestätigt, wie wenig zweckmässig, bei der erstrebten Genauigkeit, die Wahl der *Brendel*'schen Methode für Bestimmung der Thulebewegungen ist. Man muss sich sogar fragen, ob die *Gyldén-Brendel*'schen Entwicklungen der Störungsfunktion für Thule überhaupt konvergieren. Verf. zeigt (§ 4), warum der von *Krassowski* in einem späteren Aufsatze für die Konvergenz gegebene Beweis nichtig ist. Unter ähnlichen Voraussetzungen, wie *Sundman,* findet Verf. (§ 5) für die *Gyldén-Brendel*'sche Entwicklung nach Potenzen der Exzentrizitäten das Divergenzkriterium (25). Es zeigt sich dabei, dass die sichere Divergenz der *Gyldén*'schen Entwicklung erst bei grösseren Werten von e, als dies für die *Leverrier*'sche Entwicklung der Fall ist, beginnt (§ 6). Für Hilda und Thule erweisen sich (§ 7) die *Gyldén*'schen Reihen als divergent. Nach einigen Bemerkungen (§ 8) betreffend der Anwendbarkeit der Divergenzkriterien (wichtigen Ausnahmefall bilden die periodischen Lösungen), löst Verf. numerisch (§ 9) die Gleichung für den Zusammenstoss der als mit komplexen Exzentrizitäten behaftet gedachten Thule und Jupiter, wodurch die Divergenz auch numerisch bestätigt wird. Abgesehen von dieser Divergenz tritt aber bei Thule noch eine andere, herbeigeführt durch die langsame Konvergenz der *Fourier*'schen Reihe, zu Tage. Verf. zeigt (§ 10), dass bei einer schon lästigen Mitnahme der trigonometrischen Glieder bis zum Argument $12H$ die Darstellung der störenden Kräfte noch eine äusserst unbefriedigende ist. — Betr. der in der besprochenen Arbeit durchgeführten Berechnung der Lücke findet Verf. (§ 11), dass u. a. der Hauptkoeffizient der Entwicklung fehlerhaft ist, und weist darauf hin, dass bei dieser Untersuchung anstatt der *Brendel*'schen die genauere und sicherere, von *K. Schwarzschild* angegebene Methode, Verwendung finden sollte. Eine Tafel der *Gyldén*'schen Koeffizienten, berechnet für $\alpha = 0{\cdot}81781\,90074$, ist beigegeben. — Die ganze, letzter Linie auf *Brendel* fussende, der *Buchholz*'schen Arbeit über den Hildatypus sich auf das genaueste anschliessende Thuleproblemerfassung durch *Krassowski*, darf mehr nur als Exerzitium aus dem Gebiete der Algebra betrachtet werden.

Im Anhang weist Verf. auf die einfache Regel zum Übergange von den *Buchholz*'schen Formeln auf diejenigen der Habilitationsschrift von *Krassowski* hin. Bei Vergleichung beider Abhandlungen tritt eine ausserordentlich enge, kaum sonst jemals bei grösseren astronomischen Abhandlungen zweier Autoren enthüllte Verwandtschaft zu Tage. Wegen zahlreicher Fehler der Wiedergabe müsste man übrigens im Falle, wenn für den Thuletypus die von *Krassowski* behandelten Ausdrücke nötig sein sollten, sich wieder zum Original, nämlich zu der *Buchholz*'schen Arbeit wenden. Die Notwendigkeit dieser Feststellungen wird erläutert.

Im Jahre 1916 ist eine bis jetzt nicht fortgesetzte Habilitationsschrift[1]) *J. Krassowski*'s, den Anfang eines Studiums der Planetoiden vom Typus $^3/_4$ (Thule) enthaltend, erschienen. Die genannte Schrift bildet im wesentlichen eine mit analytischer und numerischer Anpassung an einen anderen Typus durchgeführte und mit Kürzungen vollgebrachte Wiedergabe eines Teiles der Arbeit von *H. Buchholz*[2]) über die Bewegung der Planetoiden vom Typus $^2/_3$ (Hilda) (näheres darüber sieh Anhang zum vorliegenden Aufsatze); dabei unterlässt es Verf. zu untersuchen, inwiefern die Formeln der *Gyldén - Brendel*'schen Störungstheorie, entwickelt von *Buchholz,* überhaupt gültig und ob sie auf den Fall einer näher an Jupiter kommenden Planetoide übertragbar sind. Diesen Gegenstand wollen wir hier näher betrachten.

Schwierigkeiten der Theorie der Bewegungen von Thule.

§ 1. Die Planetoide Thule, die einzige bis jetzt bekannte Vertreterin des Typus $^3/_4$ (was bedeutet, dass 4 Umläufe der Planetoide 3 Umläufen von Jupiter nahezu gleich sind), nimmt zwischen den kleinen Planeten einen abgesonderten Platz ein, indem sie sich auf der äusseren Seite des zwischen Erde und Jupiter kreisenden Planetoidenringes befindet. Von allen inneren Planetoiden ist ihre Bahn derjenigen von Jupiter am nächsten.

Aus dieser Lage der Bahn von Thule ergeben sich für die Bewegungstheorie dieses Planeten sehr erhebliche Schwierigkeiten. Denn, erstens sind wegen der bedeutenden Annäherungen an Jupiter die Störungen dieses kleinen Planeten grösser und analytisch schwieriger zu erfassen, als bei anderen Planetoiden (möglicherweise, so wird es wenigstens gewöhnlich angenommen, werden sie auch durch die angenäherte Kommensurabilität der Perioden von Thule und Jupiter vergrössert), andererseits ist das Verhältnis $\alpha = a : a'$ der grösseren Halbaxen der Bahn von Thule und von Jupiter schon ziemlich nah der Einheit ($\alpha = 0{\cdot}818$), und bekanntlich divergieren bei $\alpha = 1$ die in den üblichen Entwickelungen der Störungsfunktion vorkommenden Reihen.

Aus diesen Gründen müsste man erwarten, dass bei einer Aufstellung der Formeln für die Bewegung von Thule die Überwindung dieser spezifischen Schwierigkeiten die Hauptaufgabe sein wird. Wie schon erwähnt, spielen sie in *Krassowski*'s Arbeit keine Rolle. In seiner Schrift werden, genau nach *Buchholz*, die allgemeinen Formeln der Methode von *Gyldén-Brendel*[3]), deren Anwendung auf die jupiternahen kleinen Planeten von *Brendel* selbst (Th. d. kl. Plan., III T., S. 82, 83) schon im Jahre 1910 nicht mehr empfohlen wird, benutzt.

Effektive Entwicklungsexzentrizitäten.

§ 2. In seinen Entwicklungen nach Potenzen der Exzentrizitätsparameter des gestörten Planeten (η) und des Jupiter (η') beschränkt sich *Brendel* im allgemeinen auf die Glieder bis zum zweiten Grade. Dies dürfte zulässig sein, wenn es sich um Näherungen handelt, weil gewöhnlich die Glieder mit η^3, $\eta^2\eta'$, $\eta\eta'^2$, η'^3 usw. hinreichend klein sind. Für die jupiternahen Planetoiden verhält sich aber die Sache wesentlich anders.

Die in Betracht kommende Entwickelung des Hauptteiles $1:\Delta$ der Störungsfunktion (oder seiner ganzzahligen positiven Potenzen) nach Potenzen der Exzentrizitäten könnten wir uns folgendermassen ausgeführt denken. Sei Δ_0 der Wert von Δ (der gegenseitigen Entfernung der auf sich wirkenden Himmelskörper), welcher den Werten $\eta = \eta' = 0$ entsprechen würde. Dann ist $\Delta = \Delta_0 + \delta$, wo δ von der Grössenordnung von η und η' ist. Nimmt man als Längeneinheit die grössere Halbaxe a' von Jupiter, so kann man schreiben

$$\delta = \varkappa\eta + \varkappa'\eta', \qquad (1)$$

wo die Zahlenwerte der Faktoren $\varkappa$ und $\varkappa'$ der Grössenordnung nach etwa 1 sind. Entwickelt man nun $1:\Delta$ nach dem *Taylor*'schen Satze nach Potenzen von δ, so erhält man

$$1:\Delta = 1:\Delta_0 - \delta:\Delta_0^2 + \delta^2:\Delta_0^3 - \delta^3:\Delta_0^4 + \delta^4:\Delta_0^5 - \ldots .$$

oder

$$1:\Delta = 1/\Delta_0\left[1 - \delta:\Delta_0 + (\delta:\Delta_0)^2 - (\delta:\Delta_0)^3 + (\delta:\Delta_0)^4 - \ldots\right] \qquad (2)$$

Die Gleichung (2) zeigt, was elementar, aber für die Folge sehr wichtig ist, dass die Entwicklung von $1:\Delta$ nach Potenzen des *relativen* Zuwachses von Δ_0 fortschreitet. Nimmt man statt δ seinen Wert aus (1), so erhält man aus (2) eine Potenzentwicklung nach Potenzen von $\eta:\Delta_0$ und $\eta':\Delta_0$. Für die jupiternahen Planetoiden kann aber $1:\Delta_0$ grosse Werte annehmen, da in der Zeit der heliozentrischen Konjunktion $\Delta_0 = 1 - \alpha$. Für den Thuletypus hat man $1:(1-\alpha) = 5.5$, und so kommt es, dass die „kleinen" Grössen, nach deren Potenzen für den Thuletypus $1:\Delta$ entwickelt wird, nicht η und η', sondern unter Umständen $5.5\,\eta$ und $5.5\,\eta'$, bzw. $5.5\,\eta + 5.5\,\eta'$ sind. Nimmt man für Thule η gleich der oskulierenden Exzentrizität nach *Wedemeyer*, d. h. $\eta = 0.08066$ an, η' gleich 0.0483, so kann die Grösse δ für Thule bis etwa $0.443 + 0.266 = 0{\cdot}7$ ansteigen. Vernachlässigt man nun in der Entwicklung (2) die Glieder dritten Grades in η und η', so würde es bedeuten, dass man unter Umständen in (2) die dritten und höheren Potenzen von $0{\cdot}7$ gegen 1 verschwindend klein hält. Dadurch müssten aber gerade die zur Zeit der Annäherung an Jupiter sehr grossen störenden Kräfte erheblich verfälscht werden. Nach den Rechnungen von *Viljew* (Astr. Nachr. **195**.111) ist z. B. der Exzentrizitätswinkel φ von Thule während des Zeitraumes vom 6 Dez. 1907 bis zum 6 Sept. 1913, auf welchen die Konjunktion mit Jupiter in 1912 fällt, von $4^0\,38'$ (nach *Wedemeyer*) in $3^0\,40'$ übergegangen, hat also eine Änderung um $58'$ erfahren, während der Abstand ω des Perihels vom Knoten aus $234^0\,28'$ (bei *Wedemeyer*) in $220^0\,44'$ sich verwandelte (Änderung um $13^0\,44'$). Eine Theorie, welche vonvornherein merkliche Bruchteile solcher Störungen vernachlässigt, könnte nur als rohe Annäherung gelten, welche durch mechanische Quadratur in wenigen Stunden überholt sein könnte.

Die vorstehenden Betrachtungen sind ziemlich allgemein gehalten; tritt man jedoch vom Standpunkte der *Gyldén*'schen Entwicklung an die Sache näher heran, so zeigt es sich, dass die Vernachlässigungen der dritten und höheren Potenzen sich noch bedenklicher gestalten. Denn in Wirklichkeit können

die Faktoren $\varkappa$ und $\varkappa'$ in dem Ausdrucke (1) nicht nur gleich 1 werden, sondern auch wesentlich grössere Werte annehmen. In der *Gyldén-Brendel*'schen Entwicklung tritt ja im Ausdrucke der Jupiterlänge das Glied G auf, welches, mit Vernachlässigung der Glieder zweiten Grades nach der Formel 156) von *Brendel* (l. c. I) zu $-2\mu\eta\sin v + 2\eta'\sin v_1'$ ansteigen kann. Darin ist v die wahre Anomalie des kleinen Planeten, v_1' die wahre Anomalie von Jupiter; μ, das Verhältnis der mittleren täglichen Bewegungen Jupiters und der gestörten Planetoide, ist für den Thuletypus gleich $^3/_4$. Durch dieses Glied (G) allein kann Jupiter unter Umständen um $1.5\eta + 2\eta'$ längs seiner Bahn verschoben werden, also numerisch, für Thule und Jupiter (a' wieder zur Einheit genommen) um $0.12 + 0.10 = 0.22$. Befindet sich nun Thule in der Gegend der Jupiternähe, in der Distanz vom Jupiter von $1-\alpha = 0.18$ im Mittel, so wird es fraglich, ob die Entwicklung (2) von $1:\Delta$ nach Potenzen der Projektion des relativen Zuwachses der Koordinaten — wobei nur eine von vier (in einer ebenen Bewegung) in Betracht kommenden Koordinaten, einen Zuwachs grösser als Δ_0 erhalten kann — überhaupt statthaft ist. Durch solche Erwägungen wird man zur Frage nach den Konvergenzbedingungen der Entwicklung (2) geführt. Ehe wir an diese schwierige Frage im § 5 analytisch herantreten, wollen wir noch die untere Grenze der durch Vernachlässigung dritter Potenzen der Exzentrizitäten hervorgerufenen Fehler an einem numerischen Beispiel illustrieren.

Die Wirkung der höheren Potenzen der Exzentrizität numerisch beleuchtet.

§ 3. Wir wollen nämlich die Störung in der mittleren Länge zur Epoche ε von Thule, bei einer Aphelkonjunktion derselben mit Jupiter, während des Zeitraumes von 120 Tagen um die Konjunktion annähernd berechnen. Dabei soll angenommen werden, dass Thule und Jupiter sich in einer und derselben Ebene bewegen (diese Annahme ist auch allen Betrachtungen *Krassowski*'s zu Grunde gelegt), und dass Jupiter in einer Kreisbahn mit $a' = 5.2028$ um die Sonne kreist. Für Thule nehmen wir mit *Krassowski* (l. c. pg. 87) nach *Wedemeyer* $e = 0.08066$ und $a = 4.25475$ an.

Nach *Tisserand* (Méc. cel. I, pg. 433) hat man für die Aphellage des gestörten Planeten, wenn man in Betracht nimmt, dass $m = 0$, $d\Theta : dt = 0$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = m'\left(-2nar + \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\, n a^2 \sqrt{1-e^2}\right) . S$$

Es ist nun $m' = 1:1047.355$ $n = 404''.292$ $r = a(1+e) = 4.59794$ $\sqrt{1-e^2} = 0.99674$, und mit diesen Daten findet sich

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -14''.822 \times S.$$

Man hat streng $S = 1:\Delta^2 - 1:a'^2$, wo Δ die Distanz zwischen Thule und Jupiter bedeutet. Es ist aber $\Delta = a' - r = a' - a(1+e) = 0.60486$, so dass $S = 2.7333 - 0.0369 = 2.6964$. Die tägliche Änderung von ε ergibt sich zu

$$d\varepsilon / dt = -14''.822 \times 2.6964 = -39''.966.$$

Erwägt man, dass während 60 Tagen der Winkel zwischen heliozentrischen Radienvectoren der beiden Himmelskörper nur um $(345''.064 - 299''.128) \times 60 = 0^0 46'$ sich ändert, so lässt sich $d\varepsilon / dt$ während 120 Tagen um die Konjunktion als konstant anzusehen, so dass sich während dieses Zeitraumes eine beträchtliche Störung von ε in dem Betrage von $-1^0 20'$ ergibt.

Berechnet man aber S mittelst einer Reihenentwicklung unter Vernachlässigung der dritten und höheren Potenzen von e, so begeht man in S einen gleich zu findenden Fehler δS.

Man hat $\Delta = a' - a(1+e) = (a'-a)\left[1 - ae/(a'-a)\right]$, so dass

$$\Delta^{-2} = (a'-a)^{-2}(1 + 2z + 3z^2 + \ldots), \tag{3}$$

wenn $z = ae/(a'-a)$ gesetzt wird.

Aus der Formel (3), unter Vernachlässigung der nicht aufgeschriebenen Glieder, ergibt sich, wegen $a' - a = 0.94805$, $z = 0.36199$

$$\Delta^{-2} \mp (0.94805)^{-2}(1 + 0.72398 + 0.39311) = 2.3555,$$

so dass $\delta S = 2.7333 - 2.3555 = 0.3778 = 14.01\,\% \times S$.

Die Kraft S wird also durch die abgebrochene Reihenentwicklung um $14\,\%$ zu klein erhalten; der dadurch hervorgebrachte Fehler in der Störung von ε ist $80' \times 0.14 = 11'.2$. Es folgt, dass die Vernachlässigung der dritten und höheren Potenzen der Exzentrizität nur während 120 Tagen einen Fehler in den heliozentrischen Thule-Koordinaten, von nur einem Elemente herrührend, von etwa $11'$ erzeugt. Ähnliche Rechnungen in Bezug auf die Periheldistanz ω, welche in denselben 120 Tagen um $+7^0.7$ gestört wird, ergeben für den durch Abbrechung der Reihe während 120 Tagen hervorgerufenen Fehler den ansehnlichen Betrag von $1^0 5'$. Wenn nun *Krassowski* (l. c. pg. 61, 112), ähnlich wie *Brendel* (l. c. pg. 4) und *Buchholz* (l. c. pg. 392), die Genauigkeit von etwa $1'$ in den Koordinaten während eines Jahrhundertes zu erreichen sich zum Ziele stellt, so hätte dazu eine andere Methode gewählt werden sollen.

Ungültiger Konvergenzbeweis.

§ 4. Wir kommen nun zur Frage, ob für Thule die *Gyldén-Brendel*'sche Entwicklung der Störungsfunktion konvergiert. Der *für* die Konvergenz der „*Brendel*'schen Entwicklung" von *Krassowski* in einem späteren Aufsatze [1]) erbrachte Beweis soll uns nicht irreführen, weil *Krassowski* unberechtigter Weise den Beweis für die Konvergenz der bei reellem H, für $r < r'$, sicher konvergierenden (als Potenzreihe betrachteten) Entwicklung

$$a : \Delta = R_0 + 2 R_1 \cos H + 2 R_2 \cos 2 H + \dots \tag{4}$$

als Beweis für die Konvergenz der *Brendel*'schen Entwicklung betrachtet. In Wirklichkeit steht die Reihe (4) nur am Anfang der Transformationen, welche die *Gyldén-Brendel*'sche Entwicklung am Ende ergeben. Insbesondere wird dabei auch H in eine Potenzreihe nach den Exzentrizitäten der beiden Planeten entwickelt. Da nach den Grundsätzen der Funktionentheorie bei Untersuchung der Konvergenz der Potenzreihen auch imaginäre Werte der Veränderlichen, nach welchen entwickelt wird, mit in Betracht gezogen werden müssen, so wäre H im allgemeinen als komplex anzusehen, und die stillschweigende Grundvoraussetzung des erwähnten Konvergenzbeweises, dass $\cos n H$, dem Modulus nach, die Einheit nicht übersteigt, unrichtig wird, indem dieser Cosinus bei jedem komplexen H mit wachsendem n unendlich wächst.

Divergenzkriterium für die Gyldén'sche Entwicklung der Störungsfunktion.

§ 5. Im folgenden werden wir die zur Divergenz *hinreichenden* Bedingungen suchen. Somit können wir annehmen, dass der störende und der gestörte Planet sich in einer und derselben Ebene bewegen, und dass alle Störungen verschwinden. Die den störenden Kräften proportionalen Grössen P und Q haben dann nach *Brendel* für die elliptischen Bewegungen die folgende Gestalt

$$\left.\begin{matrix} P \\ Q \end{matrix}\right\} = \sum \mathfrak{M} \cdot \eta^{k_1} \eta'^{k_2} \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} (k_3 w + k_4 \text{v} + k_5 \text{v}_1), \tag{5}$$

wo $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\alpha\, k_1\, k_2\, k_3\, k_4\, k_5)$ eine Funktion von dem Verhältnisse $\alpha = a : a'$ der Halbaxen und fünf ganzzahliger Parameter $k_1\, k_2\, k_3\, k_4\, k_5$ ist, und v die wahre Anomalie des gestörten Planeten, v_1 dieselbe Anomalie vom Perihel des *störenden* Planeten gerechnet bedeutet. Die Grösse w kann als ein der wahren Länge des gestörten Planeten entsprechender Winkel zwischen Radienvectoren, welcher sich dann ergeben würde, wenn zum Anfang der Zeitrechnung die wahren Längen der Planeten gleich ihren mittleren Längen wären, und wenn seitdem sich die Planeten mit einer gleichförmigen Geschwindigkeit, gleich ihren mittleren täglichen Bewegungen, um die Sonne bewegen würden, betrachtet werden. Diese Grösse w ist also von dem wahren Winkel zwischen Radienvectoren der Planeten nur um die Grössen von der Ordnung von η und η' verschieden. Die obigen Definitionen haben wir hinzugefügt, weil sie vielleicht nicht ohne Mühe aus dem *Brendel*'schen Werke herausfindbar wären; die Störungen, wie schon erwähnt, konnten dabei vernachlässigt werden.

Es handelt sich um die Untersuchung der Potenzreihen (5) in η und η', unter der Annahme, dass w, v und v_1 beliebige reelle Werte annehmen können. Wir setzen in den Entwicklungen (5)

$$\eta = e(\cos\psi + i \sin\psi) \qquad \eta' = e'(\cos\psi' + i\sin\psi'), \tag{6}$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist.

Erweisen sich nun die Kräfte P und Q für irgend ein System der vier reellen Grössen

$$e \qquad e' \qquad \psi \qquad \psi'$$

unendlich gross, so divergieren sicher, nach den bekannten Sätzen der Funktionentheorie, die Reihen (5), wenn

$$\eta > e \qquad \eta' > e'.$$

Wir suchen nun solche kleine Werte von e und e', für welche, bei entsprechender Wahl von ψ und ψ', die Kräfte P und Q unendlich gross werden. Bezeichnet man mit Δ, wie immer, die gegenseitige Entfernung der Planeten, so hat man die Wurzeln η und η' der Gleichung

$$\Delta = 0 \tag{7}$$

oder

$$r^2 + r'^2 - 2rr' \cos H = 0 \tag{8}$$

zu finden, wo H den Winkel zwischen r und r' bedeutet.

Die Untersuchung der Gleichung (8) ist komplizierter, als im Falle der Entwicklungen von *Leverrier*, wegen des schon von *Poincaré* (Méc. cel., t. II. I-re pt., pg. 48) betonten Umstands, dass die wahre Anomalie des störenden Planeten, weiter durch v' bezeichnet, mit v und v_1 durch eine nicht einfache, *implizite* Gleichung verbunden ist.

Wir benutzen die folgenden Formeln der *Gyldén-Brendel*'schen Theorie (*Brendel*, l. c. pg. 63, Form. 155a)

$$r = \frac{a(1-\eta^2)}{1+\eta\cos \text{v}} \quad (9), \qquad r' = \frac{a'(1-\eta'^2)}{1+\eta'\cos \text{v}'} \quad (10), \qquad H = w - G \quad (11)$$

$$G = \mu \sum B_n \sin n\,\text{v} - \sum B_n' \sin n\,\text{v}' \tag{12}$$

$$v' = -w + G + v_1, \tag{13}$$

wo man für den Thuletypus $\mu = n' : n = {}^3/_4$ annehmen muss.

Die $\sum' B_n \sin n\,v$ und $\sum' B_n' \sin n\,v'$ sind die Ausdrücke, welche zu den wahren Anomalien v und v′ der Planeten hinzugefügt, ihre mittleren Anomalien ergeben. Den genauen Ausdruck für B_n (und B_n') sieh bei *Brendel*, l. c. pg. 30; bis auf die Glieder zweiten Grades in η und η' inclusive hat man (l. c. pg. 63)

$$G = -2\mu\eta \sin v + 2\eta' \sin v' + \frac{3}{4}\mu\eta^2 \sin 2v - \frac{3}{4}\eta'^2 \sin 2v' \tag{14}$$

Bezeichnen wir die Exponentialfunktion mit exp, so können wir die Gleichung (8) auch folgendermassen schreiben

$$[r' - r \exp(-i H)] \cdot [r' - r \exp(i H)] = 0. \tag{15}$$

Der erste Faktor gleich Null gesetzt, ergibt

$$r \exp(-i H) = r', \tag{16}$$

oder, wenn man durch r' dividiert und die Gleichung (11) benutzt

$$(r/r') \exp(-i w) \exp(i G) = 1,$$

oder noch

$$\frac{a}{a'} \frac{1-\eta^2}{1-\eta'^2} \frac{1+\eta' \cos v'}{1+\eta \cos v} \exp(-i w) \exp(i G) = 1. \tag{17}$$

Da wir nur die hinreichenden Bedingungen für die *Divergenz* suchen, so können wir ohne weiteres annehmen, dass für die für uns in Betracht kommenden Werte von η und η' die in der Gleichung (17) vorkommenden v′ und G in Potenzreihen (in welchen v, v_1 und w als Parameter auftreten) in η und η' entwickelbar sind. Sonst würden ja sicher die *Gyldén-Brendel*'schen Reihen für die Störungsfunktion divergieren müssen, ohne dass dadurch unser abzuleitendes *Divergenz*kriterium beeinträchtigt sein könnte.

Sind aber v′ und G in Potenzreihen in η und η' bei genügend kleinen η und η' entwickelbar, so gilt dasselbe von der linken Seite der Gleichung (17). Zunächst wollen wir diese Gleichung bis auf die Glieder ersten Grades in η und η' entwickeln. Setzen wir noch, wie gewöhnlich, $a : a' = \alpha$, und nehmen w als kleine Grösse ersten Grades an, so erhalten wir, da dann, der Gleichung (13) gemäss, $v' \sim v_1$ ist

$$\alpha (1 + \eta' \cos v_1 - \eta \cos v)(1 - i w)(1 + i G) = 1$$

oder, mit derselben Genauigkeit

$$\alpha (1 + \eta' \cos v_1 - \eta \cos v - i w + i G) = 1 \tag{18}$$

Wir nehmen an, dass $v_1 = v - 180^0$, d. h. dass die Absiden der Planetenbahnen einen Winkel von 180^0 miteinander bilden. Es ist dann $\cos v_1 = -\cos v$ und, angenähert, $\sin v' = \sin v_1 = -\sin v$, so dass mit Beschränkung auf die Glieder ersten Grades

$$G = -2\mu\eta \sin v + 2\eta' \sin v' = -2\mu\eta \sin v - 2\eta' \sin v = -2 \sin v (\mu\eta + \eta') \tag{19}$$

Setzen wir noch statt η und η' die Ausdrücke (6) und statt G den Ausdruck (19) in die Gleichung (18) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\alpha [1 - e \cos\psi \cos v - e' \cos\psi' \cos v + 2 \sin v (\mu e \sin\psi + e' \sin\psi')] + \\ &+ \alpha i [-e \sin\psi \cos v - e' \sin\psi' \cos v - 2 \sin v (\mu e \cos\psi + e' \cos\psi') - w] = 1 . \end{aligned} \tag{20}$$

Für die gegebenen positiven Werte von e und e' wird der reelle Teil der linken Seite am grössten, wenn man annimmt

$$v = \psi = \psi' = 90^0. \tag{21}$$

Zum Verschwinden des imaginären Teils braucht man dann nur

$$w = 0 \tag{22}$$

zu setzen. Die Gleichung (20) geht dann über in

$$\alpha (1 + 2\mu e + 2e') - 1 = 0 \tag{23}$$

Wenn nun für die gegebenen Werte von e und e' der mit e und e' wachsender Ausdruck

$$\alpha (1 + 2\mu e + 2e') - 1$$

positiv ist, so divergieren die Reihen für P und Q, weil dann die Gleichung (23), und damit auch die Gleichung (8), abgesehen von den Gliedern höherer Ordnungen, durch *kleinere* Werte von e und e' befriedigt werden kann.

Für die obigen (21) (22), die Divergenz begünstigenden Werte der Parameter, wollen wir jetzt die Gleichung (17) bis auf die Glieder *zweiten* Grades entwickeln.

Wir setzen also von Anfang an

$$v = 90^0 \qquad w = 0^0 \qquad v_1 = -90^0,$$

woraus, bis auf die Glieder zweiten Grades inclus., aus (14) und (13) folgt

$$G = -2\mu\eta - 2\eta' \qquad \cos v' = \cos(G - 90^0) = \sin G = -2\mu\eta - 2\eta' .$$

Unsere Gleichung (17) gibt dann zuerst

$$\alpha[(1-\eta^2):(1-\eta'^2)].[1-2\eta'(\mu\eta+\eta')]\exp(-2\mu i\eta-2i\eta')=1,$$

und wenn wir noch weiter $\psi=\psi'=90^0$ setzen, so dass ie an Stelle von η und ie' an Stelle von η' eintritt, so folgt

$$\alpha[(1+e^2):(1+e'^2)][1+2e'(\mu e+e')][1+(2\mu e+2e')+2(\mu e+e')^2+\ldots]=1,$$

woraus, unter Vernachlässigung der dritten und höheren Potenzen von e und e', sich ergibt

$$\alpha[1+2\mu e+2e'+(1+2\mu^2)e^2+6\mu ee'+3e'^2]-1=0. \tag{24}$$

In der Gleichung (24) tritt der imaginäre, auf Null gebrachte Teil der Gleichung (17), nicht mehr auf. Die linke Seite der Gleichung (24) ist negativ für $e=e'=0$ und wächst mit zunehmendem positiven e und e'; wäre sie also positiv für die gegebenen Werte von e und e', so würden sich kleinere positive Werte von e und e' finden, durch welche (24) und somit auch (17) befriedigt sein würde. Wir kommen also zum folgenden Divergenzkriterium:

Die Gyldén-Brendel'schen Entwickelungen der Störungsfunktion und Störungskräfte nach Potenzen der Excentrizitäten sind sicher divergent, wenn die Ungleichheit

$$\alpha[1+2\mu e+2e'+(1+2\mu^2)e^2+6\mu ee'+3e'^2+\ldots]>1, \tag{25}$$

wo $\alpha=a:a'<1$, $\mu=n':n$, erfüllt ist.

Zwei Bemerkungen betr. das aufgestellte Divergenzkriterium.

§ 6. 1. Wenn man das *Sundman*'sche Divergenzkriterium[5]) für die Entwicklung der Störungsfunktion und der Störungskräfte in *Fourier*'sche Reihen nach mittleren Anomalien der beiden Planeten und Potenzreihen nach den Potenzen der Exzentrizitäten angenähert in der Gestalt schreibt

$$\alpha(1+2e+2e')>1$$

und mit den ersten Gliedern von (25) vergleicht, so bemerkt man, dass eine sichere Divergenz der Reihen nach mittleren Anomalien schon bei kleinerer Exzentrizität e, als dies bei der *Gyldén*'schen Entwicklung nach wahrer Anomalie des gestörten Planeten der Fall ist, eintritt. Diese Tatsache spricht zu Gunsten der *Gyldén*'schen Wahl der wahren Anomalie als Entwicklungsparameter.

2. Bei der oben gefundenen die Divergenz begünstigenden gegenseitigen Lage der Planeten, befinden sich dieselben keineswegs in Absiden, wo sie am nächsten aneinander kommen, sondern in Quadratur zur Absidenlinie.

Mann könnte sich das dadurch verständlicher machen, dass die durch η und η', dass heisst durch die Abweichung von der Kreisbahnbewegung, hervorgebrachte Änderung der gegenseitigen Entfernung der Planeten bei der obigen Lage die grösste ist.

Folgerungen aus dem Divergenzkriterium.

§ 7. Für die, die Divergenz sicher herbeiführende Exzentrizität e des gestörten, inneren Planeten findet man aus (24) die quadratische Gleichung

$$(1+2\mu^2)e^2+2\mu(1+3e')e+(1+2e'+3e'^2-1:\alpha)=0$$

welche im Falle Jupiters und eines kleinen Planeten vom Thuletypus, bei $\mu=0{\cdot}75$, $1:\alpha=1{\cdot}2118$, den unteren Grenzwert *)

$$e=0.05879 \qquad \varphi\,(\text{Exz.-Winkel})=3^0.37 \tag{25 a}$$

und, im Falle eines kleinen Planeten vom Hildatypus, bei $\mu=2/3$, $1:\alpha=1.31079$, den unteren Grenzwert

$$e=0.11845 \qquad \varphi\,(\text{Exz.-Winkel})=6^0.80 \tag{25 b}$$

ergibt.

In der Praxis, wegen der numerischen Divergenz, würde es natürlich im allgemeinen nicht statthaft sein auch die Planetoiden mit nur unerheblich von den angegeben Grenzwerten kleineren Exzentrizitäten nach der *Gyldén Brendel*'schen Methode zu behandeln.

Bei der Thule selbst, der einzigen bis jetzt bekannten Vertreterin ihres Typus, ist $e=0.08066$ (s. oben, § 2), so dass die Reihen nicht konvergent sind. Nach der Jupiternähe im 1912 wäre e auf 0.05802 gesunken (Bahnelemente d. kl. Planeten, Berlin, 1924), was sehr nahe dem Grenzwert (25a) ist. Übrigens sollten die in einer Theorie gebrauchten Reihen für alle bei der Planetoide vorkommenden oskulierenden Exzentrizitäten numerisch konvergieren.

Was die bis jetzt bekannten Planetoiden des Hilda ($^2/_3$) Typus betrifft, so hat nur Chicago 334 ($\varphi=2^0.43$) eine kleine, eine sichere Divergenz nicht herbeiführende Exzentrizität; für die anderen Planetoiden von diesem Typus, auch für Hilda selbst ($\varphi=9^0.2$), wären die Entwicklungen nach *Gyldén-Brendel* ungültig.

---

*) Im Falle, wenn η nahezu gleich Null wäre, würde eine in dem vorliegenden Aufsatze nicht betrachtete, sozusagen *dynamische* Divergenz eintreten. Da der Fall vorläufig für uns kein Interesse bietet, lassen wir ihn bei Seite.

Über die Anwendbarkeit der Divergenzkriterien.

§ 8. Die obigen auf dem Divergenzkriterium beruhenden Schlüsse können aber, streng genommen, nicht für ganz einwandfrei gelten, wenn auch in der Literatur ganz ähnliche Schlüsse (aus dem *Sundman*'schen Divergenzkriterium) häufig gezogen werden. Bei der Ableitung des obigen, wie auch des *Sundman*'schen Divergenzkriteriums, wird nämlich vorausgesetzt, — und diese Voraussetzung ist für den Beweis wesentlich, — dass die Anomalien der Himmelskörper und der Winkel zwischen Absidenlinien willkürliche Werte annehmen können. Nun gilt die Voraussetzung betr. die Richtung der Absidenlinien, wenn man eine bestimmte Planetoide behandelt, im allgemeinen nur für genügend grosse, vielleicht nach Jahrtausenden zu zählende Zeiträume, und natürlich nur dann, wenn keine Libration des Perihels stattfindet (für Thule ist übrigens, nach § 3, die Richtung des Perihels grossen Schwankungen unterworfen); man könnte also hoffen, wenigstens in einer beschränkten Zeit, in welcher der zur Divergenz der Reihen nötige Wert des Winkels zwischen Absiden in Wirklichkeit nicht vorkommt, auch die im allgemeinen divergenten Reihen gebrauchen zu können. Was die zweite Voraussetzung betr. die gleichzeitig zu Tage tretenden Anomalien der beiden Planeten anbelangt, so ist dieselbe für gewöhnliche Planetoiden gar keine Einschränkung, nicht aber für solche, welche mit Jupiter kommensurable mittlere Bewegungen haben; im letzten Falle entspricht einer vorgegebenen Anomalie der Planetoide nur eine endliche Anzahl der lgeichzeitig möglichen Anomalien des störenden Planeten.

Zusammenstoss zwischen fingierten Planeten als Divergenzbeweis für Thulereihenentwicklungen.

§ 9. Für die numerische Praxis ist eine Annäherung an Divergenz fast ebenso wichtig, wie die Divergenz selbst, so dass aus dem Standpunkte der Bedürfnisse einer numerischen Theorie das obige fast für eine Subtilität gelten dürfte. Für Thule unterliegt ausserdem die tägliche Änderung des Winkels w, wegen der Störungen, bedeutenden Schwankungen und auch die mittlere tägliche Bewegung (zur Zeit gleich etwa 404″) weicht merklich von der Kommensurabilität (399″) ab, so dass, neben der schon erwähnten Beweglichkeit des Perihels, die dem Divergenzbeweise zu Grunde liegenden Voraussetzungen ungefähr erfüllt sind. Um aber die Frage nach der Konvergenz der Potenzreihen für Thule möglichst erschöpfend aufzuklären, haben wir noch den sicheren Weg numerischer Berechnung eingeschlagen. Dabei brauchten natürlich nicht die Reihen selbst untersucht zu werden; auf Grund der fundamentalen, schon benutzten Sätze der Funktionentheorie, genügt es das Unendlichwerden des die Reihen miterzeugenden Ausdrucks $1:\Delta$ zu erforschen.

Wir stellen uns also die Frage, ob die Gleichung $\Delta = 0$ im Falle von Thule und Jupiter tatsächlich auflösbar ist. Die Auflösbarkeit ist wie folgt zu verstehen. Die in der Gleichung (7), geschrieben in der Form (17), vorkommenden Grössen sind für Thule und Jupiter, bei $\alpha = 0.81782$, $\mu = 0.73988$, die folgenden fünf η, η', v, v′, w und die Funktion derselben G. Die drei Grössen v v′ w sind aber jetzt nicht mehr als voneinander unabhängig zu betrachten; ist nämlich v (wahre Anomalie von Thule) gegeben, so folgen v_1 und w aus den Bahnelementen beider Himmelskörper. Es fragt sich nun, ob es einen reellen Wert von v giebt, für welchen, für ein gewisses, den Ungleichheiten $|\eta| < e$, $|\eta'| < e'$ genügendes Wertepaar der komplexen oder reellen Zahlen η und η', die Gleichung (17) befriedigt sein würde. Da wir in dem Gebiete der komplexen Zahlen rechnen müssen, so zerfällt die Gleichung (17) in zwei, welche durch entsprechende Wahl der drei Unbekannten, einer reellen v, und zweier Komplexen η und η', zu erfüllen sind, was natürlich, wenn es überhaupt möglich ist, auf eine unendliche Anzahl von Arten sich machen lässt.

Es wäre zu weitläufig, wenn wir die Rechnungen, welche uns zur Auffindung der Wurzeln geführt haben, hier wiedergeben wollten. Es muss die Angabe genügen, dass die Auflösung durch sukzessive Annäherungen beim fortwährenden Rechnen mit komplexen Zahlen durchgeführt wurde. Durch vierstellige Rechnung ist das folgende System der Wurzel gefunden

$$\mathrm{v} = 303^0.46 \qquad \eta = 0.0702\,(\cos 240^0.5 + i \sin 240^0.5) \qquad \eta' = 0.0483\,(\cos 117^0 + i \sin 117^0) \tag{26}$$

Da die ganze Rechnung zu den seltensten ihrer Art zu gehören scheint, so mögen hier wenigstens die folgenden, die Prüfung des erhaltenen Systems erleichternden Erläuterungen gegeben werden

Zur Berechnung von w aus der Gleichung (22)

$$w = (1 - \mu)\, v - B \tag{27}$$

wo v die mittlere Länge der Planetoide bedeutet, und

$$B = \lambda' - \mu\lambda, \tag{28}$$

wenn man durch λ und λ' die zur Zeit $t = 0$ geltenden mittleren Längen der Planetoide und Jupiters bezeichnet, — braucht man zunächst v, welches man aus der wahren Anomalie v durch Addition der Perihelslänge von Thule erhält. Nach den schon einige Male benutzten *Wedemeyer*'schen Elementen, welche die Grundlage auch aller weiteren Berechnungen bilden sollen, ist die Perihelslänge gleich $\omega + \Omega = 234^0.47 + 75^0.60 = 360^0 - 49^0.93$ (wie immer wird die Bahnneigung von Thule vernachlässigt); man hat also $v = \mathrm{v} - 49^0.93 = 303^0.46 - 49^0.93 = 253^0.53$.

Es ist jetzt B aus (28) zu berechnen. Die mittlere Länge λ von Thule für die *Wedemeyer*'sche Epoche 1907 Dez. 6.5 Berl. mittl. Z., gleich $M+(\omega+\Omega)$, ist $121^0.26 - 49^0.93 = 71^0.33$. Die mittlere Länge λ' von Jupiter zu derselben Epoche ist, unter Vernachlässigung der Präzession seit 1900.0, gleich der mittleren Länge $238^0.0470$ für 1900 Jan 0, vermehrt um den Zuwachs $240^0.673$ in 2896.5 Tagen. Auf solche Weise findet sich $\lambda' = 238^0.047 + 240^0.673 = 118^0.720$, und $B = \lambda' - \mu\lambda = 65^0.944$.

Jetzt kann w aus (27) berechnet werden und findet sich $= 0.26012 \times 253^0.53 - 65^0.944 = 0^0.00$.

Die Hilfsgrösse v′, welche bei den durch (26) definierten Werten von η und η' nicht mehr die wahre Anomalie Jupiters sein wird, soll durch die Gleichung (13) bestimmt werden. Somit

$$v' = 0^0.00 + G + (303^0.46 - 62^0.64) = 240^0.82 + G \tag{29}$$

Die Konstante $62^0.64$, gleich dem Winkel zwischen den Perihelen der Thule und des Jupiter, ist von v substrahiert, um v in v_1 überzuführen. Wenn man noch den Ausdruck (12) für G in die Gleichung (29) einsetzt, so erhält man

$v' = 240^0.82 + \mu \sum B_n \sin n v - \sum B_n' \sin n v'$, oder, unter Berücksichtigung der Ausdrücke von B_n und B_n' in Funktion von η und η' (*Brendel*, l. c., Formel 47)

$$v' = 240^0.82 - 2\mu\eta \sin v + \tfrac{3}{4}\mu\eta^2 \sin 2v - \tfrac{1}{3}\mu\eta^3 \sin 3v + 2\eta' \sin v' - \tfrac{3}{4}\eta'^2 \sin 2v' \tag{30}$$

(Da die Auffindung von v′ numerisch erfolgt, so ist die Benutzung der abgekürzten unendlichen Reihe für G nur Bequemlichkeitssache. Man könnte ebenso aus v und η die (komplexe) mittlere Anomalie M finden, weiter M′, und, durch Übergang durch die komplexe exzentrische Anomalie E′, aus η' und E′ die Grösse v′).

Unter Einsetzung der Werte aus (26) in (30) ergibt sich $(i = \sqrt{-1})$

$$v' = 238^0.45 - 0.0776\,i + (-0.0438 + 0.0960\,i) \sin v' + (0.0011 + 0.0015\,i) \sin 2v' + \text{zu vernachl. Grössen.} \tag{31}$$

Aus dieser impliziten Gleichung findet sich durch sukzessive Annäherungen

$$v' = 240^0.25 - 0.1642\,i, \tag{32}$$

da diese v′ die Gleichung (31) befriedigt.

(Die Sinussen komplexer Bogen finden sich am leichtesten aus der Beziehung $\sin(x+iy) = \sin x \cos\text{hyp}\, y + i \cos x \sin\text{hyp}\, y$; so ist $\sin v' = -0.8799 + 0.0818\,i$ und $\sin 2v' = +0.908 + 0.170\,i$).

Aus (29) findet sich jetzt

$$G = -0^0.57 - 0.1642\,i \tag{33}$$

während

$$\cos v' = \cos(240^0.25 - 0.1642\,i) = -0.5029 - 0.1432\,i$$

Wenn wir aber die zu lösende Gleichung (7) in der Form $\Delta^2 : r^2 = 0$ schreiben, so muss es sich ergeben aus (8) und (11), wegen $w = 0$

$$1 + (r/r')^2 - 2(r/r') \cos G = 0 \tag{34}$$

Man hat aber

$$r/r' = \alpha(1-\eta^2)\ (1+\eta' \cos v') : (1-\eta'^2)\ (1+\eta \cos v) = 0.84857 + 0.00851\,i$$

$$\cos G = 1.01346 - 0.00164\,i,$$

und, nach Einsetzung dieser Werte in (34) findet man in der Tat $0 = 0$, da

$$1 + (0.72000 + 0.01444\,i) + (-1.72001 - 0.01446\,i) = 0.0000 + 0.0000\,i.$$

Dadurch ist die Divergenz der *Gyldén-Brendel*'schen Potenzreihen in Exzentrizitäten für Thule auch numerisch dargetan.

Langsame Konvergenz der Fourierschen Reihen für Thule.

§ 10. Wir wollen jetzt von der schon ausführlich behandelten Divergenz der als unendlich fortgesetzt gedachten Potenzreihen in η und η' absehen: im Gegenteil wollen wir annehmen, dass die Potenzreihen in η und η' konvergent sind (was jedenfalls für ganze Gebiete der gegenseitigen Lagen der Planeten zutreffend ist), und dass in unseren Entwicklungen alle Potenzen von η und η' gehörig berücksichtigt sind. Unter dieser Voraussetzung können wir uns die, die numerischen Werte von P und Q ergebenden Reihen als *Fourier*'sche Reihen eines einzigen Argumentes H (Winkel zwischen Radienvectoren) geschrieben denken, wobei alle Koeffizienten bekannte Funktionen des Verhältnisses $r : r'$ sind. Allein in der Abhandlung *Krassowski*'s sind die letzten in den Entwicklungen in Betracht genommenen Glieder fast durchweg diejenigen mit sin $12H$ und cos $12H$ (was im Zusammenhange mit Vernachlässigung der höheren Potenzen der Exzentrizitäten steht), und die Formeln müssten noch viel unhandlicher und komplizierter werden, wenn man weitere Glieder mitnehmen wollte. Wir wollen uns jetzt, wenigstens zur allgemeinen Orientierung, ansehen, inwiefern die Vernachlässigung der weiteren Glieder berechtigt ist.

Diese Frage behandeln wir wieder numerisch. Wir nehmen an, dass das Verhältnis der Radienvectoren, $r : r'$, weiter durch α bezeichnet, gleich 0.875 ist, was für Thule durchaus möglich ist, und berechnen für verschiedene Werte des Winkels H zwischen Radienvectoren (im Sinne Länge der Planetoide

minus Länge Jupiters genommen) die *Gyldén-Brendel*'schen Derivierten P und Q. Um alle Potenzen der Exzentrizitäten strenge zu berücksichtigen, rechnen wir, als ob die Planetenbahnen Kreise mit $\alpha = 0.875$ wären. Wir bestimmen die Grössen P und Q (welche im vorliegenden Falle — abgesehen von dem dynamischen Anziehungsfactor fm' — gleich der mit α^2 multiplizierten Komponenten der störenden Kraft auf die Richtung des Radiusvector der Planetoide und die dazu perpendikulare Linie, die letzte im Sinne der wachsenden Längen, genommen sind) auf zweierlei Weise: einerseits nach strengen Formeln, andererseits nach den mit $\cos\ 12\,H$ und $\sin\ 12\,H$ abgebrochenen, für $\alpha = 0.875$ geltenden *Fourier*'schen Reihen (4). Wir nehmen $r' = 1$ an.

Man hat einerseits streng, wie man es durch elementare Betrachtungen findet

$$P = \alpha^2 \{(\cos H - \alpha)\,\Delta^{-3} - \cos H\} \qquad Q = \alpha^2 \sin H (1 - \Delta^{-3}), \tag{35}$$

wo $\Delta = (1 + \alpha^2 - 2\,\alpha \cos H)^{1/2}$, andererseits, nach den abgebrochenen *Fourier*'schen Reihen:

$$\left.\begin{aligned} P = {} & 1.6373 + 2.9767 \cos H + 3.7190 \cos 2\,H + 3.5708 \cos 3\,H + 3.3681 \cos 4\,H + 3.1410 \cos 5\,H + \\ & + 2.9057 \cos 6\,H + 2.6716 \cos 7\,H + 2.4445 \cos 8\,H + 2.2280 \cos 9\,H + 2.0247 \cos 10\,H + \\ & + 1.8340 \cos 11\,H + 1.6575 \cos 12\,H \\ Q = {} & - 0.4877 \sin H - 1.7489 \sin 2\,H - 1.9788 \sin 3\,H - 2.0649 \sin 4\,H - 2.0646 \sin 5\,H - \\ & - 2.0106 \sin 6\,H - 1.9233 \sin 7\,H - 1.8164 \sin 8\,H - 1.6990 \sin 9\,H - 1.5772 \sin 10\,H - \\ & - 1.4553 \sin 11\,H - 1.3363 \sin 12\,H \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Um die Koeffizienten der Entwicklungen (36) zu erhalten, sind die *Gyldén*'schen Grössen $\gamma_0^{1\cdot n}$ und $\gamma_1^{1\cdot n}$ berechnet worden, was nach den u. a. bei *Buchholz* (l. c., Cap. II) zu findenden Formeln mittelst mechanischer Quadratur mit 21 Ordinaten durchgeführt wurde.

Es hat sich dann gefunden:

Komponente P. (37)

	$H = 0^0$	$H = 15^0$	$H = 30^0$	$H = 45^0$	$H = 60^0$	$H = 90^0$
Nach der strengen Formel (35)	+ 48.234	+ 32.982	− 0.718	− 0.875	− 0.727	− 0.286
Nach (36)	+ 34.188	+ 4.084	− 0.513	− 1.417	− 0.065	+ 0.458

Komponente Q.

	$H = 0^0$	$H = 30^0$	$H = 60^0$	$H = 90^0$	$H = 120^0$	$H = 150^0$
Nach der strengen Formel (35)	0.000	− 2.678	− 0.126	+ 0.439	+ 0.509	+ 0.437
Nach (36)	0.000	− 0.230	+ 1.027	+ 1.106	+ 0.893	+ 0.161

Die Übereinstimmung ist so schlecht, dass man vielleicht ein grobes Versehen in den zu Grunde liegenden Ausdrücken vermuten könnte. Ein solches ist aber ausgeschlossen. Zur Prüfung haben wir für die Reihen (36) 73 bezw. 72 Koeffizienten bestimmt und nach der Substitution der verschiedenen Werte von H näherten sich die aus Reihenentwicklungen erhaltenen P und Q den aus den strengen Formeln sich ergebenden Werten bis auf etwa 0.002, wobei die letzten Koeffizienten von der Ordnung von 0.0015 waren.

Für $\alpha = 0.818$ ergeben sich natürlich etwas abgestumpfte, aber nicht wesentlich andere Abweichungen zwischen (35) und (36), wie nach (37).

Wie aus obiger Zusammenstellung ersichtlich, dürfen die nach 13 resp. 12 Anfangsgliedern abgebrochenen Fourier'schen Reihen, da sie keine genügende Darstellung der Störungskräfte geben, als Basis für eine Theorie der Thulebewegungen nicht angenommen werden*).

Über die Bestimmung der Lücke.

§ 11. In der *Krassowski*'schen Arbeit wird nach der *Brendel*'schen Methode, unter Benutzung der *Buchholz*'schen, an den Typus $^3/_4$ angepassten Formeln, auch die sogenannte Lücke **) (im Sinne, wie sie von *Brendel* verstanden wird) für den Thuletypus behandelt. Hier wäre zunächst zu bemerken (was jedoch natürlich die Richtigkeit der Methode nicht gefährdet), dass die an die Spitze der Rechnungen von *Krassowski* gestellte Tafel der *Gyldén*'schen Koeffizienten (l. c. pg. 93) für log $\alpha = 9{\cdot}912\,6572$, gemäss den Elementen von Thule und Jupiter, trotz Kontrollen für mehrere Koeffizienten fehlerhaft ist; bei dem wichtigsten Koeffizienten $\beta_1^{\,1}$ ist der Fehler am grössten und beträgt etwa $5^0/_0$. Für dasselbe $\alpha = 0{\cdot}81781\,90074$ haben wir für die *Gyldén*'schen β die folgende Tafel berechnet.

---

*) *Brendel* hat neulich (Astr. Nachr. Bd. 224, pg. 229—236) hierin prinzipiell Abhilfe vorgeschlagen. Bei Thule dürften die sonst üblichen Methoden, heisst es l. c. pg. 229, sich als kaum durchführbar erweisen. Unter üblichen Methoden sind aber wohl hier nur analytische Methoden zu verstehen. Übrigens werden auch durch die vorgeschlagene Methode die von der Entwicklung nach Potenzen der Exzentrizitäten und der Neigung herrührenden Schwierigkeiten nicht behoben.

**) Wie *G. Stracke* (Kleine Planeten, Berlin 1925) bemerkt, häufen sich die jupiternahen Asteroiden gerade in der Umgebung der Kommensurabilitätsstellen.

n/s	1	3	5	7	9
0	1.293 4924	2.422 0122	5.188 3780	12.296 000	31.173 55
1	0.734 7027	1.687 3096	4.136 1397	10.626 981	28.224 82
2	577 4740	1.424 2930	3.661 3754	9.704 800	26.311 46
3	493 6130	1.266 1238	3.344 7801	9.035 844	24.829 49
4	438 9686	1.155 0217	3.107 9090	8.509 011	23.613 92
5	399 5735	1.070 6089	2.919 8650	8.075 473	22.584 15
6	369 3676	1.003 3005	2.764 9206	7.708 422	21.692 69
7	345 2219	0.947 8266	2.633 8914	7.391 291	20.908 62
8	325 3298	900 9861	2.520 9246	7.113 040	20.210 47
9	308 5629	860 6942	2.422 0557	6.865 914	19.582 66
10	294 1740	825 5207	2 334 4742	6.644 247	19.013 48
11	281 6455	794 4445	2.256 1161	6.443 769	18.493 90
12	270 6058	766 7129	2.185 4225	6.261 181	18.016 79
13		741 7560	2.121 1877	6.093 882	
14			2.062 4613	5.939 785	
15				5.797 192	

Eigentlich hätte α formell für die Untersuchung der Lücke nicht aus den Elementen der Planeten, sondern besser aus dem Verhältnisse $^3/_4$ der mittleren Bewegungen genommen werden sollen.

Es wäre aber statt der *Brendel*'schen wohl die neuere [6]) von *K. Schwarzschild* (Astr. Nachr. Bd. 160 Nr. 23) angegebene Methode vorzuziehen, einerseits wegen der grösseren Genauigkeit der *Schwarzschild*'schen Formeln, andererseits, weil er zwei sich einander kontrollierende Verfahren angibt. Ausserdem muss eben im Lichte der von *W. Dziewulski* [7]) ausgeführten Berechnungen (dessen Resultate *Krassowski* als Stütze der *Brendel*'schen Methode anführt) die Bestimmung wenigstens der unteren Grenze der „Lücke" nach der *Brendel*'schen Methode als bedenklich erscheinen. Die untere Grenze entspricht nämlich der Exzentrizität e_0 gleich 0·143, so dass sich der Planet in dieser periodischen Lösung der als kreisförmig angenommenen Jupiterbahn auf 0·065 a' nähert, während nach *Dziewulski* (Astr. Nachr. Bd. 183. Nr. 5; sieh pg. 71), beim Hildatypus, für $e_0 = 0{\cdot}20$ (was eine Annäherung an die Jupiterbahn von nur 0·085 a' ergibt) das erste *Schwarzschild*'sche Verfahren — welches genauer als das *Brendel*'sche ist — die Störungen teilweise schon im verkehrten Sinne gibt.

Schlussbemerkungen.

§ 12. Das *Buchholz*'sche für den Hildatypus aufgestellte Formelgerüst ist durch seine Dimensionen und seine Verwicklung beinahe monumental, und doch bildet es, wie aus obigem ersichtlich ist, keine richtige Basis für die Untersuchung der Bewegungen von Thule *). Wenn auch das algebraische Rechnen ein sehr wichtiges mechanisches Rüstzeug der Wissenschaft ist, so darf man niemals mit Formeln blindlings hantieren; den algebraischen Transformationen muss das Erfassen des Wesens des zu behandelnden Problems vorangehen. Bei der Unvollkommenheit der menschlichen Vorstellungskraft und bei der Leichtigkeit in Fehler zu verfallen, sollte man auch nimmer versäumen die Formeln sich durch numerische Anwendungen lebendig zu machen und sie auf solche Weise in Bezug auf ihre Anwendbarkeit und Richtigkeit zu prüfen.

ANHANG.

Es gelangte neulich zur Versendung in einem zirkularartigen Schreiben der *Wolna Wszechnica Polska* ein Brief von Prof. *M. Brendel* vom 2 April 1926, welcher den Standpunkt vertritt, dass Herr *J. Krassowski* gar nicht die Formeln von *Buchholz* angewendet habe. Wenn es wirklich so wäre, so könnten die Formeln von *Krassowski* als unabhängige Bestätigung der *Buchholz*'schen betrachtet werden. Anderseits steht die Ansicht von Prof. *Brendel* im Widerspruche mit dem in Circ. Obs. Crac. (Nr. 11, pag. 7, Zeilen 23—21 von unten) gesagten, und wir sind deshalb genötigt das Thema von dem gegenseitigen Verhältnisse der beiden Arbeiten zu erörtern.

Der Übergang von den *Buchholz*'schen zu den *Krassowski*'schen Endformeln gestaltet sich in der Regel durch Ausmultiplizieren mit $^4/_3$ der Koeffizienten von w in den Winkelargumenten (wobei sich auch die Indexe entsprechend ändern), und durch Einsetzen $^4/_3\,\mu$ anstatt μ in die Koeffizienten. Die Art und Weise, wie die Formeln ineinander übergehen, mag durch zwei Beispiele anschaulich gemacht werden.

---

*) Leider scheint auch die erwähnte mehrjährige, unter ständiger Beratung von Prof. *Brendel* durch *Buchholz* mit bewundernswertem Eifer für den Hildatypus durchgeführte, nie aber in Zahlen versetzte, einen Teil der Störungstheorie von Hilda bildende Arbeit für die Wissenschaft aus ähnlichen Gründen nahezu fruchtlos bleiben zu müssen; vgl. wie sich darüber Prof. *Brendel* selbst schon in 1910 in der Th. d. kl. Plan. III, pg. 82 und 83, äussert.

1

(*Buchholz*, pg. 386)

$$q_{11} = A_{3.0.2} + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{9.0.1} \beta_5 + \frac{1}{4} A^{1.0}_{6.0.0} \beta_{10} + \frac{1}{2} A^{+1.1.0}_{0.0.1} \beta_3 - \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{3.0.1} \beta_5 + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{6.0.1} \beta_3 + 3\mu A_{6.0.0} \gamma_{10} + \frac{9}{2} \mu A^{(-1)}_{9.0.1} \gamma_5 - \frac{3}{2} \mu A^{(-1)}_{3.0.1} \gamma_5$$

(*Krassowski*, pg. 59)

$$q_{11} = A_{4.0.2} + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{12.0.1} \beta_5 + \frac{1}{2} A^{1.0}_{8.0.0} \beta_{10} + \frac{1}{2} A^{+1.1.0}_{0.0.1} \beta_3 - \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{4.0.1} \beta_5 + \frac{1}{2} A^{-1.1.0}_{8.0.1} \beta_3 + 4\mu A_{8.0.0} \gamma_{10} + 6\mu A^{-1}_{12.0.1} \gamma_5 - 2\mu A^{-1}_{4.0.1} \gamma_5$$

Die Indexe 3, 6, 9 der vielfachen von w (die ersten unteren Indexe von A), durch $^4/_3$ multipliziert, sind in 4, 8, 12 übergegangen, während die *Buchholz*'schen numerischen Koeffizienten der drei letzten Glieder, wo μ vorkommt, bei *Krassowski* mit $^4/_3$ multipliziert auftreten.

2

(*Buchholz*, pg. 404)

$$q''' = \frac{A^{2.0}_{3.0.0}}{2(1+\delta_1)} - \frac{A^{2.0}_{3.0.0}}{4(1+\delta_1)} + \frac{A^{2.0}_{9.0.0}}{4(1+\delta_1)} + \frac{3\mu A^{1.0}_{3.0.0}}{2(1+\delta_1)^2} - \frac{9\mu A^{1.0}_{9.0.0}}{2(1+\delta_1)^2} - \frac{9\mu^2 A_{3.0.0}}{(1+\delta_1)^3} - \frac{9\mu^2 A_{3.0.0}}{2(1+\delta_1)^3} + \frac{81\mu^2 A_{9.0.0}}{2(1+\delta_1)^3}$$

(*Krassowski*, pg. 72)

$$q''' = \frac{A^{2.0}_{4.0.0}}{2(1+\delta_1)} - \frac{A^{2.0}_{4.0.0}}{4(1+\delta_1)} + \frac{A^{2.0}_{12.0.0}}{4(1+\delta_1)} + \frac{2\mu A^{1.0}_{4.0.0}}{(1+\delta_1)^2} - \frac{6\mu A^{1.0}_{12.0.0}}{(1+\delta_1)^2} - \frac{16\mu^2 A_{4.0.0}}{(1+\delta_1)^3} - \frac{8\mu^2 A_{4.0.0}}{(1+\delta_1)^3} + \frac{62\mu^2 A_{12.0.0}}{(1+\delta_1)^3}$$

Hier sind wieder die Indexe der vielfachen von w, nämlich 3, 6 und 9, in 4, 8 und 12 übergegangen. Man bemerkt sofort, dass *Buchholz* in der rechten Seite die ähnlichen Glieder, und nämlich das erste mit dem zweiten, und das sechste mit dem siebenten nicht zusammengezogen hat. Das ist ein reines Versehen, weil die Formel nicht etwa zu weiteren Transformationen, sondern zu Rechenzwecken dienen soll. Dasselbe Versehen kommt nun auch bei *Krassowski* vor. — Wie oben, entstehen die nicht mit den *Buchholz*'schen identischen numerischen Koeffizienten bei *Krassowski* durch Multiplikation des vierten und fünften, wo μ vorkommt, durch $^4/_3$, und bei den drei letzten Gliedern mit μ^2 durch Multiplikation mit $(^4/_3)^2 = {}^{16}/_9$; dabei ist 62 im letzten Gliede, anstatt 72, ein oft bei *Krassowski* vorkommender Rechenfehler. — Das versehentliche gemeinsame nicht Zusammenziehen der ähnlichen, nebeneinander stehenden Glieder kommt öfters vor; z. B. in dem Ausdrucke für q_1 (*Buchholz*, pg. 384, Form. [27], *Krassowski* pg. 58), und p_1 (*Buchholz*, pg. 387, Form. [32], *Krassowski* pg. 53), wo übrigens bei *Krassowski* ausserdem zwei Druckfehler vorkommen.

Erweiterungen der *Buchholz*'schen Formeln finden wir bei *Krassowski* nicht.

Diese sich durch die ganze *Krassowski*'sche Dissertation ziehende, ausserordentlich enge Verwandtschaft beider Arbeiten, spiegelt sich auch in den Errata ab. Nachstehend folgt ein Verzeichnis der uns bekannt gewordenen gemeinsamen Errata. Ein Teil derselben ist uns aus dem Leserkreise der *Buchholz*'schen Abhandlung mitgeteilt worden, und sie haben sich dann bei *Krassowski* wiedergefunden.

Buchholz, pg. 325, *Krassowski*, pg. 19. Die *Fourier*'sche Entwicklung des Ausdruckes $(1-\eta^2)^{3/2} : (1+\eta\cos v)^2$, wo $\eta < 1$ ist, wird unbegreiflicher Weise als ein durch die *Gyldén*'sche Definition von η erzielter Erfolg bezeichnet, während natürlich diese Entwicklung nichts mit der Bedeutung von η zu tun hat.

Buchholz, pg. 336, Zeile 14 von unten, *Krassowski*, pg. 24, Zeile 9 von oben. Statt $+8\rho\eta'^2$ und $-8\rho'\eta'^2$ lies $-8\rho\eta'^2$ und $+8\rho'\eta'^2$.

Buchholz, pg. 339, Formel 23, *Krassowski*, pg. 26, Z. 1 v. u. Endzeichen $-\ldots$ zu streichen.

Buchholz, pg. 343, Formel 32, *Krassowski*, pg. 28, Formel 32. Koeffizient des letzten Gliedes soll $-^3/_4$ nicht $+2$ sein.

Buchholz, pg. 344, Z. 4 v. u., *Krassowski*, pg. 29, Z. 11 v. o. Factor μ bei dem Gliede mit $\sin(w_1 - v_1)\cos(w_1 - v_1)$ überflüssig.

Buchholz, pg. 345, Z. 2 v. o., *Krassowski*, pg. 29, Z. 15 v. o. Statt **Plus**-zeichens vor dem Gliede $\frac{3}{4}\eta'^2 \sin 2(w_1 - v_1)$ muss **Gleichheits**-zeichen sich befinden.

Buchholz, pg. 374, Z. 7 u. 6 v. u., *Krassowski*, pg. 44, Z. 13, 12, 11, v. u. An fünf Stellen muss statt **cos** überall **sin** stehen. Bei dem Zusammenziehen der ähnlichen Glieder verwandelt übrigens richtig *Buchholz* S. 385 (und ebenso *Krassowski* S. 60) **cos** in **sin**.

Buchholz, pg. 386, Z. 9 v. o., *Krassowski*, pg. 59, Z. 5 v. o. Das erste Glied in q_{13} hat im Koefficiente A^{-2} statt A^{-1}.

Buchholz, pg. 406, Formel 33, *Krassowski*, pg. 76, Formel 39, und pg. 114, Form. 7, muss vor dem Gliede mit $\cos 3w$ ($\cos 4w$) Pluszeichen, anstatt Minuszeichens stehen.

Dass trotzdem die oben angeführte Ansicht Prof. *Brendel*'s geäussert werden konnte, ist dadurch möglich geworden, dass Herr *Krassowski* die Tatsache, dass sowohl die Auseinandersetzung der Methode wie auch die Formeln im wesentlichen aus der *Buchholz*'schen Arbeit stammen, weder im Titel angedeutet

noch im Texte irgendwo erwähnt hat, wenn auch der Name „*Buchholz*", gemäss der Zählung von Prof. *Brendel*, auf 7 Seiten genannt ist. Wenn nun Prof. *Brendel* noch betont hat, dass *Krassowski* bei seinen Untersuchungen wesentlich tiefer als *Buchholz* gegangen ist, so kann das im Lichte der obigen Tatsachen nur als *lapsus calami* betrachtet werden.

Ausser den obigen gemeinsamen Errata kommen bei *Krassowski* noch so zahlreiche andere Druckfehler vor (deren Verzeichniss sich erübrigt, weil sie sich leicht aus Vergleichung mit der *Buchholz*'schen Arbeit ergeben), dass es gegebenenfalls einfacher und sicherer wäre, wenn man die Formeln für den Thuletypus nötig hätte, dieselben unter gehöriger Modifikation direkt aus der *Buchholz*'schen Arbeit für den Hildatypus zu entnehmen.

1926, Dezember 4. *T. Banachiewicz.*

Literaturnachweis.

1) *Jan Krassowski.* O ruchu planetoid typu $^3/_4$ (Thule). Wyznaczenie wyrazów typowych oraz przerwy. [Sur le mouvement des petites planètes du type de Thule ($^3/_4$). Détermination des termes élémentaires et de la lacune pour le type Thule]. Gedruckt in „Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego III. — Wydział nauk matematycznych i przyrodniczych Nr. 12". [Travaux de la Société des Sciences de Varsovie. III. Classe des sciences mathématiques et naturelles Nr. 12]. Warszawa, 1916. 124 S. 8⁰. — Die vorstehende Schrift ist im Astronomischen Jahresberichte XVIII Bd. wie folgt referiert: „Auf eine in polnischer Sprache gehaltene Abhandlung von 100 S. und eine auf zwei Seiten gegebene Zusammenstellung der Literatur folgt auf 22 S. ein Résumé in französischer Sprache. Nach kurzer Besprechung der Arbeiten von Gyldén und seinen Nachfolgern wird die Gyldén-Brendelsche Theorie auf die Planeten vom $^3/_4$ Typus (Thule) angewendet und die charakteristischen und elementaren Terme abgeleitet. Alsdann ergibt sich als Lücke, die in dem Sinne Brendels in dem Planetoidenring besteht, $391''.5 < n_1 < 401''.7$, derart, dass die Bahn eines in diesen Grenzen befindlichen Planeten instabil sein würde". Dem obigen Referate wäre hinzuzufügen, dass Verf. sich speziell mit den Bewegungen der Planetoide Thule (vgl. „O ruchu" pg. 104—105, 118—120) beschäftigt.

2) *Hugo Buchholz.* Untersuchung der Bewegung vom Typus $^2/_3$ im Problem der drei Körper und der „Hilda-Lücke" in System der kleinen Planeten auf Grund der Gyldén'schen Störungstheorie. (Denkschriften d. k. Akademie in Wien 2 Teile. Bd. 72 und 77). Wien 1901 und 1904. 165 + 129 Seiten. 4⁰. Der zweite Teil kommt hier nicht in Frage.

3) *Martin Brendel.* Theorie der kleinen Planeten. Erster Teil. Berlin 1898. (Abhandl. der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math. physik. Klasse. Neue Folge Bd. 1 Nr. 2). 171 S. in 4⁰. — Es sind noch die Teile II—IV vorhanden.

4) *Jan Krassowski.* Sur la convergence du développement en série de la fonction perturbatrice par la méthode de M. Brendel dans le cas de la planète (279) Thule". (Acad. Royale de Belgique. Bull. de la Classe des sciences. Séance du 4 déc. 1920, Nr. 12, p. 586—589).

5) *Karl F. Sundman.* Über die Störungen der kleinen Planeten. Helsingfors 1901; ergänzend ist der Gegenstand in Öfv. of Finska Vetensk. Soc. Förh. 58 (1915—1916) behandelt worden.

6) *K. Schwarzschild.* Über die periodischen Bahnen vom Hecubatypus (Astr. Nachr. Bd. 160).

7) *W. Dziewulski.* Über die periodischen Bahnen vom Hildatypus (Astr. Nachr. Bd. 183).

Stellas variabile.

(In ordine alphabetico de constellationes).

XZ Aquilae 51. In basi de 16 observationes in 5 minimos ex tempore 1926 VI 5^d — XI 2^d, me trova graphice:

$$E = +130 \qquad 45856^d.856 \pm 0^d.004 \qquad O - C = +0^d.050 \pm 0^d.006,$$

relative ad elementos: $45578^d.775 + 2^d.1387 \, . \, E$ (A. A. c Vol. I).

$$\pm 0.004 \pm 0.0003$$

Correctione de periodo es: $+ 0^d.00038 \pm 0^d.00005$. Novo periodo $2^d.13908$ es in concordia cum omnes minimos observato (E : ab -28 ad $+179$). Differentias O — C non es majore, quam errores de observatione. *J. Witkowski.*

WW Aurigae 45. Ex 49 observationes me obtine, que periodo de hoc stella debe es duplicato. Minimos pari es aliquanto plus profundo, quam minimos impari et cade plus mature de $0^d.014$ (?). — Ex 27 observationes in 5 minimos pari ex tempore 1923 X 31^d – 1924 IX 23^d, me trova:

$$E = +2294 \qquad 44994^d.971 \qquad O - C = -0^d.012$$

Ex 22 observationes in 6 minimos impari ex tempore 1923 XII 9^d — 1924 IX 27^d:

$$E = +2295 \qquad 44996^d.248 \qquad O - C = +0^d.002$$

relative ad elementos *J. Hellerich*: $42\,098^d.7734 + 1^d.262511 \, . \, E + 0^d.0120 \sin 0^d.180 \, (E - 25.6)$ (A. N. 5198). Duplicatione de periodo debe es confirmato cum photometro.

RS Canum venat. 11. Ex 45 observationes in 10 minimos ex periodo de tempore 1922 XI 29^d – 1924 VI 26^d me obtine minimo normale:

$$E = +684 \qquad 44718^d.847 \qquad O - C = -0^d.016$$

relative ad elementos *Nijland:* $41437^d.042 + 4^d.797985 \, . \, E$ (A. N. 5059).

TV Cassiopeiae 29. Ex 46 observationes in 7 minimos ex periodo de tempore 1924 I 10^d — VI 3^d, me obtine minimo:

$$E = +2064 \qquad 44998^d.4744 \qquad O - C = +0^d.0018$$

relative ad elementos *J. Hellerich:* $41257^d.2464 + 1^d.8126096 \,.\, E$ (A. N. 5295).

TW Cassiopeiae 30. Ex 35 observationes in 8 minimos secundare ex periodo de tempore 1923 VIII 12^d — 1924 X 11^d, me trova minimo:

$$E = +1423 \qquad 45023^d.876 \qquad O - C = +0^d.008$$

relative ad elementos: $40958^d.8771 + 2^d.856635 \,.\, E$ (*V. J. S.* **58**), que refer ad minimos secundare.

U Coronae borealis 4. Ex 52 observationes in 6 minimos ex periodo de tempore 1923 III 21^d — XII 5^d, me trova minimo:

$$E = +5630 \qquad 44722^d.833 \qquad O - C = +0^d.015$$

relative ad elementos *J. Hellerich:* $25286^d.9297 + 3^d.4522008 \,.\, E + 0^d.0140 \sin (0^0.0825 \,.\, E - 275^0)$ (A. N. 5276). *J. Gadomski.*

Z Draconis 9. In basi de 45 observationes ex periodo de tempore 1926 III 14^d — V 22^d, cum auxilio de transparente graphico me inveni minimo normale:

$$E = +6225 \qquad 45766^d.888 \mp 0^d.003 \qquad O - C = +0^d.021 \mp 0^d.003$$

relative ad elementos *Blažko* (A. N. 5167): $37316^d.9027 + 1^d.3574225 \,.\, E - 0^d.0126 \sin \left[\frac{360^0}{7600} (E + 375)\right]$

Janusz Pagaczewski.

TW Draconis 30. Ex 64 observationes in 12 minimos ex periodo de tempore 1923 III 24^d — XI 12^d, me optine minimo:

$$E = +1655 \qquad 44690^d.8423 \qquad O - C = +0^d.0160$$

relative ad elementos *J. Hellerich:* $40045^d.953 + 2^d.80657 \,.\, E$ (A. N. 5208).

RU Eridani 13. Ex 12 observationes in 7 minimos ex periodo de tempore 1924 XI 28^d — — 1925 X 26^d, me obtine, cum auxilio de graphico transparente, minimo:

$$E = +7051 \qquad 45282^d.634 \mp 0^d.005 \qquad O - C = -0^d.016 \mp 0^d.005$$

relative ad elementos *Zinner:* $40825^d.0083 + 0^d.6322$ E (A. N. 4679). Stellas de comparatione *L. Campbell* (Harv. Ann. **63**,154) es incommodo.

RZ Eridani 18. Secundum discussione de 190 observationes de 6 observatores (*Beyer* 53, *Gadomski* 43, *Graff* 21, *Henz* 10, *Kordylewski* 58, *Witkowski* 4) ex tempore 1923 III 21^d — 1926 III 26^d, me trova, que elementos de hoc stella es erroneo. Periodo de Harvard $p = 19^d.64$ debe es duplicato et facto pauco plus longo. Novo elementos, valido pro proximo posteritate, es:

$$44993^d.54 + 39^d.293 \,.\, E$$

Epocha de Harvard, $34152^d.5$ (Lit. u. Gesch. d. Lichtw. III), da relative ad novo elementos, $O - C = +3^d.8$, quod indica, que periodo es variabile. Me obtine: $M = 7^m.81$, $m = 9^m.05$, $D = 2^d.2$, $d = 0^d.0$ et vestigios de pauco profundo minimo secundare ($0^m.2$), que cade plus mature $0^d.4$.

RY Geminorum 17. Ex 20 observationes in 6 minimos ex periodo de tempore 1923 XI 2^d — — 1924 XI 10^d me trova minimo:

$$E = +668 \qquad 44902^d.78 \qquad O - C = 0^d.00$$

relative ad correcto elementos de *Graff:* $39154^d.824 + 9^d.3009 \,.\, E$ (B. Z. 1923, Nr. 11).

TX Herculis 31. Ex 15 observationes in 6 minimos primare ex tempore 1924 VIII 28^d — — 1926 V 14^d, et 15 observationes in 4 minimos secundare ex tempore 1926 IV 12^d — V 13^d, me obtine sequente minimos primare et secundare:

$$E = +2243 \qquad 45759^d.029 \qquad O - C = +0^d.007$$
$$E = +2243 \qquad 45760^d.066 \qquad O - C = +0^d.0018$$

relative ad elementos de *J. Hellerich:* $41138^d.868 + 2^d.059810 \,.\, E$ (A. N. 5159).

δ Librae. Ex 50 observationes in 9 minimos ex tempore 1921 VI 25^d — 1924 VI 4^d, me obtine minimo normale:

$$E = +8545 \qquad 44292^d.0788 \qquad O - C = -0^d.0104$$

relative ad elementos de *Kron:* $24404^d.880 + 2^d.3273504 \,.\, E$ (Liter. und Gesch. d. Lichtw. I).

U Ophiuchi 4. Ex 50 observationes in 8 minimos ex tempore 1923 VI 15^d — 1924 X 14^d, me inveni normale minimo primare:

$$E = +9339 \qquad 45083^d.879 \qquad O - C = -0^d.007$$

relative ad elementos de *J. Hellerich:* $29419^d.1402 + 1^d.6773472 \,.\, E$ (B. Z. 1923, Nr. 22).

J. Gadomski.

SW Ophiuchi 23. In basi de 43 observationes ex tempore 1926 III 11^d — VII 7^d, de que 17 es facto in minimo primare, me trova, cum auxilio de transparente graphico, minimo normale:

$$E = +5989 \qquad 45790^d.016 \mp 0^d.005 \qquad O - C = +0^d.420 \mp 0^d.005$$

relative ad elementos: $31141^d.820 + 2^d.44578 . E$ (Liter. u. Gesch. d. Lichtw. II)

Janusz Pagaczewski.

β Persei (Algol). Ex 30 observationes in 9 minimos ex tempore 1924 I 10^d — VII 3^d, 43 observationes in 11 minimos ex tempore 1924 IX 4^d — 1925 VIII 11^d, et 23 observationes in 6 minimos ex tempore 1925 IX 26^d — 1926 IV 12^d, me obtine:

$$E = +15822 \qquad 45003^d.6927 \qquad O - C = -0^d.0210$$
$$E = +15942 \qquad 45347\ .7750 \qquad O - C = -0^d.0178$$
$$E = +16025 \qquad 45585\ .7738 \qquad O - C = -0^d.0073$$

relative ad elementos periodico de *Hellerich*: $-362^d.7412 + 2^d.86731077 . E + 0^d.1266 \sin 0^0.01786 (E-176) + 0^d.0119 \sin 0^0.08762 (E - 188)$ (A. N. 5007)

Correctiones, que supra, es continuatione de correctiones de β Persei in Circ. Observ. de Cracovie Nr. 19. Duo ultimo epochas da sequente elementos lineare, valido pro proximo posteritate: $45585^d.7738 + 2^d.867455 . E$

RT Persei 12. Ex 28 observationes in 8 minimos ex tempore, 1925 IX 22^d — 1926 IX 2^d, me trova:

$$E = +7957 \qquad 45759^d.855 \qquad O - C = -0^d.003$$

relative ad correcto elementos de *Graff*: $39001^d.007 + 0^d.849422 . E$ (B. Z. 1925. Nr. 11).

J. Gadomski.

BN Scuti 91. In basi de 28 observationes ex annos 1925 et 1926 me inveni correcto elementos:

$$45939^d.50 + 14^d.610 . E$$

Ex 135 observationes de hoc tempore (1925 — 26), 42 observationes refer ad tempore de luce diminuto in 9 sequentes epochas: E = — 38, — 35, — 33, — 30, — 25, — 23, — 8, 0, + 1. Restantes 93 observationes, que refer ad luce pleno de stella, exclude omnes subperiodos; inter alteros etiam subperiodo $7^d.3$, que annuntia *Cesewicz* (A. N. 5465), es excluso per 12 observationes facto in 7 differentes, dies. — Duratione de eclipsi es circa 30^h. Novo elementos satisfac momentos, citato in Circ. Crac. Nr. 19.

K. Kordylewski.

W Ursae Minoris 6. Ex 66 observationes in 16 minimos ex tempore 1923 VI 3^d – 1924 XI 28^d, me trova minimo normale:

$$E = +1492 \qquad 44897^d.235 \qquad O - C = -0^d.160$$

relative ad elementos *Martin-Plummer:* $42359^d.185 + 1^d.701213 . E$ (M. N. **78**, 644). Epochas de luce diminuto, observato per diversos observatores, non pote es satisfacto cum elementos lineare. Id es probabile, que periodo non es constante. Duratione de eclipsi es circa $0^d.85$.

RS Vulpeculae 11. Ex 25 observationes in 11 minimos ex tempore 1923 VII 10^d – 1924 X 14^d, me obtine:

$$E = +774 \qquad 45211^d.873 \qquad O - C = +0^d.037$$

relative ad elementos *Dugan:* $41746^d.1226 + 4^d.477666 . E$ (Princ. Contr. Nr. 6).

Nova stella variabile: B. D. — $15^0$688.

Stella de comparatione de RU Eridani 13, signato per *L. Campbell* (H. A. LXIII, 154) per littera *d*, es variabile. *Campbell* trova cum photometro: $d = 10^m.42$, ergo $0^m.76$ minore luce, que $c = 9^m.66$.

1921 XI 27^d et XI 28^d me inveni *d* in pari luce cum *c* ($d = 9^m.7$); 1924 XI 4^d me trova *d* plus lucido, que *c* ($d = 9^m.6$), etiam 1924 XI 27^d : $9^m.6$; 1924 XII 14^d pari luce, que *c* ($d = 9^m.7$).

Prof. *Graff* trova cum photometro (probabile in anno 1925) *d* circa pari luce, que *c*.

Kordylewski 1925 X 11^d inveni independente, que *d* es plus lucido, que *c* ($d = 9^m.6$ et $9^m.7$), 1926 II 27^d illo trova *d* in multo minore luce ($d = 10^m.0$), II 28^d : $10^m.3$, $10^m.5$, $10^m.3$, III 7^d : $10^m.5$ (circa pari luce, que $e = 10^m.83$), III 11^d : $10^m.2$, III 14^d : $10^m.2$, III 16^d : $10^m.1$.

1926 XI 12^d me trova de novo *d* pari luce, ut *c* ($d = 9^m.7$).

Variabilitate de hoc stella non es dubio (independente observationes de 4 observatores), amplitudine de luce es circa 1^m ($9^m.6 - 10^m.5$), curva de luce etiam ignoto.

J. Gadomski.

La nébulosité en Scandinavie dans la zone de totalité de l'éclipse de Soleil du 29 juin 1927.

Par *Casimir Kordylewski* et *Sigismond Eckstein*.

La nébulosité moyenne correspondante aux observations du matin (presque toujours 7^h Temps Universel) a été déduite d'après les moyennes des mois de Juin et de Juillet pour 18 stations situées dans la zone de totalité el e-même ou dans son proximité; notre table contient aussi le nombre des jours beaux et nuageux (par mois) ainsi que la température moyenne diurne. Dans ces recherches nous avons eu recours aux Annuaires des Instituts météorologiques de la Norvège et de la Suède; les températures ont été trouvées à l'aide des isothermes pour la Scandinavie publiées par *Hamberg* *).

Station	λ	φ	h	Nébulosité moyenne 7^h	Nombre de jours beaux par mois	Nombre de jours nuageux par mois	Nombre d'années	Température moyenne diurne
1. Skudenes	5°16′	+59° 9′	7m	6.4	5	10	23	13°
2. Dalen	7 58	+59 27	103	5.6	4	7	32	15
3. Röldal	6 52	+59 44	430	5.2	8	10	17	12
4. Nes	9 6	+60 35	163	5.2	6	8	24	14
5. Finse	7 32	+60 36	1226	5.0	8	8	11	8
6. Tonsaasen	9 38	+60 49	629	5.4	5	8	17	12
7. Granheim	8 58	+61 6	391	5.7	4	9	46	13
8. Vang	8 32	+61 8	471	6.1	3	10	11	12
9. Lillehammer	10 28	+61 7	195	5.5	4	7	31	15
10. Listad	9°56′	+61°34′	289m	5.9	3	8	29	14°
11. Dovre	9 7	+62 5	644	6.1	3	11	48	11
12. Tönset	10 45	+62 17	490	6.0	4	9	40	12
13. Östersund	14 39	+63 11	323	6.0	5	11	43	12
14. Storlien	12 6	+63 19	593	6.6	4	15	20	10
15. Stensele	17 10	+65 4	328	6.2	4	12	32	13
16. Jockmock	19 51	+66 36	255	5.2	4	10	32	13
17. Gällivare	20 40	+67 8	365	5.7	5	10	22	12
18. Vardö	31 8	+70 22	10	7.3	3	15	23	7

On a trouvé pour la nébulosité moyenne donnée par la table en question une erreur moyenne (calculée d'après les déviations des nombres pour les années isolées de leurs moyenne) de ± 0·1 à ± 0·2 conformémen à ce que le nombre d'années d'observations dépassait 32 ou en était moindre. Il est certain que l'erreur m yenne de la différence de la nébulosité pour deux stations est inférieure aux nombres qui ressortiraient de l'erreur moyenne ci-dessus, multipliée par $\sqrt{2}$.

Les données ci-dessus permettent de caractériser directement les conditions de nebulosité pour la côte ainsi que le long de quelques lignes de chemin de fer ou des chaussées croisent la zone de totalité. Ainsi pour le Sud de la Norvège les stations de la table correspondent: 1 — à la côte, 2 et 3 — à la route Skien — Odda, 4 et 5 — à la ligne du chemin de fer Oslo — Bergen, 6 — 8 — au chemin de fer Oslo — Fagernes, 9 — 11 — au chemin de fer Oslo — Dombaas, 12 — au chemin de fer Oslo — Röros; nous avons de même pour la Suède: 13 et 14 — au chemin de fer Stockholm — Trondhjem, 17 — au chemin de fer Lulea — Narvik; enfin pour le Nord de la Norvège: 18 correspond à la côte.

Il en resort le minimum de nébulosité matinale: au Sud de la Norvège — les alentours de la ligne du chemin de fer Oslo — Bergen (comme l'a communiqué déjà *J. F. Schroeter*, voir „The Observatory" Août 1926), au Nord de la Suède — les environs de Gällivare, de Jockmock (l'accès à ces régions est plus difficile) et probablement aussi vers le sud de ce lieu le district du lac Stor-avan.

Cette recherche a été entreprise sur l'initiative de Mr. le prof. *Banachiewicz*.

Cracovie, 1926 Nov. 30.

K. Kordylewski, Z. Eckstein

*) Moyennes et extrêmes de la température de l'air en Suède; Bihang till Meteorologiska Iakttagelser i Sverige Vol. 49, 1907.

Drukowano na zlecenie Obserwatorjum Krakowskiego.

1926. XII. 6.

Dyrektor: *Tad. Banachiewicz.*